Skript und Aufgaben zum Thema

„Einfache Kurvenscharen“

von

Georg Sahliger

Aktueller Stand

15.06. 2022

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort

Das folgende Skript beschäftigt sich mit dem Thema „Kurvenschar“. Voraussetzung hierfür ist der sichere Umgang mit Kurvendiskussionen und den damit verbundenen Anwendungsaufgaben.

1 Definition

Enthält eine Funktionsvorschrift neben der Variablen z.B. x noch einen weiteren Parameter z.B. a, so spricht man von einer Kurvenschar bzw. Funktionenschar.

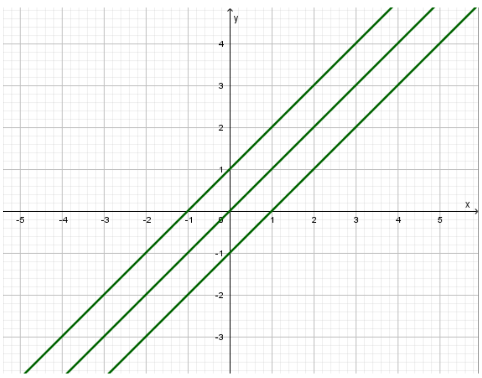
Eine Schar ist also eine Menge aus verschieden Kurven.

Beispiel $f_a(x) = a\,x^2 + 2x + a$

Sprich: „f a von x ist gleich…“

2 Zeichnen einer Kurvenschar

Aufgabe 1: Zeichne die folgende Kurvenschar $f_a(x) = x + a$ $mit\ a \epsilon IR$ und beschreibe den Einfluss von **a** auf den Verlauf der Graphen.



Vorgehensweise: Ist für **a** kein Wert angegeben, so wählt man diese frei und zwar so, dass deutlich wird, wie a den Verlauf der Kurve beeinflusst.

Wählen wir für **a** = -1 , 0 und 1. Diese Werte setzen wir für **a** ein und zeichnen die Funktionen:

$f_{-1}(x) = x - 1$

$f_0(x) = x + 0$, also $f_0(x) = x$

$f_1(x) = x + 1$

Daraus ergibt sich folgendes Schaubild der Graphen:

Der Parameter **a** verschiebt also die Gerade nach oben bzw. nach unten. Daher spricht man hier auch von einer Geradenschar.

Will man die Funktion im Taschenrechner oder bei GeoGebra zeichnen, so kann man die Schar folgendermaßen eingeben: f(x) = x + {-1,0,1}.

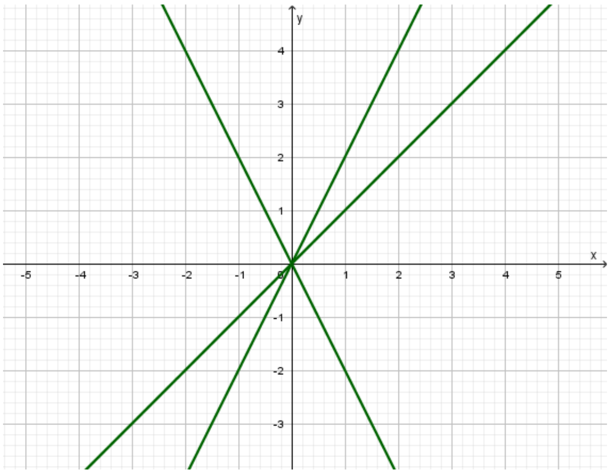
Alternativ kann man auch f(x) = x + a eingeben und so einen „Schieberegler“ anlegen. Hierzu finden sich im Internet viele hilfreiche Videos.

Achtung! Bei manchen Taschenrechnern ist es wichtig: $f(x) = a \cdot x$ und nicht nur $f(x) = a\,x$ einzugeben.

Alternativ können in der Aufgabe auch schon die Werte für **a** angegeben sein:

Aufgabe 2

Gegeben sei die Kurvenschar $f_a(x) = ax$. Skizziere die Graphen der speziellen Scharfunktionen $f_{-2}, f_1\ und\ f_2$ und beschreibe den Einfluss des Parameters **a** auf den Verlauf der Kurve.



„**a**“ beeinflusst die Steigung der Geraden. Je größer der Betrag von **a** ist, desto größer ist die (positive bzw. negative) Steigung.

In diesem Fall spricht man von einem Geradenbüschel

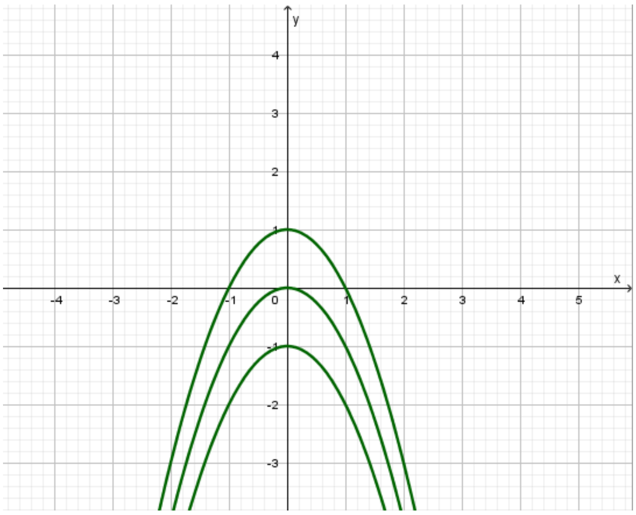
Aufgabe 3

Eine weitere Art **a** anzugeben sieht man bei folgender Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie die Funktionsgraphen für **a** = -1, **a** = 0 und

a = 1 der folgenden Funktionenschar:

$f_a(x) = -x^2 + a$



„**a**“ verändert also den y-Wert des Hochpunktes. Je größer **a** ist, desto größer ist der y-Wert des Hochpunktes.

3 Nullstellenberechnung

Bei Kurvenscharen ergeben sich bzgl. der Nullstellenberechnung drei typische Fragestellungen:

1. Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Kurvenschar.
2. Zeigen Sie, dass die Kurvenschar eine, keine oder unendlich viele Nullstellen hat.
3. Wie muss man **a** wählen, damit die Kurvenschar genau eine Nullstelle hat.

Dies gilt natürlich auch für Extrempunkte und Wendepunkte.

Zu 1.: Berechne die Nullstellen der folgenden Kurvenschar: $f_a(x) = \frac{1}{3}x$ + a.

$\frac{1}{3}x$ + a = 0 | -a

$\frac{1}{3}x$ = - a | · 3

x = -3a   N(-3a | 0)

Nun kann man für a Werte einsetzen und die zugehörigen Nullstellen berechnen: Für **a** = 2 ergibt sich

N(-3· 2| 0) also N(-6| 0)

Damit hat die Kurvenschar unendlich viele Nullstellen: …, N(4| 0), N(2| 0) N(0| 0) N(-2| 0) N(-4| 0), ...

Jede einzelne Kurve hat genau eine Nullstelle.

Dies bringt uns schon zur Aufgabe 2:

Lautet also die Aufgabe: Zeigen, dass die Kurvenschar unendlich viele Nullstellen hat, dann setzt man die Kurvenschar gleich null und löst nach **x** auf. Bleibt der Parameter **a** erhalten, dann ist dies der Nachweis, dass die Kurvenschar unendlich viele Nullstellen hat.

Zu 2:

Zeige, dass die Kurvenschar $f_a(x) = \frac{1}{3}a \cdot x$ mit a ≠ 0 genau eine Nullstelle besitzt.

Gleiches Vorgehen:

$\frac{1}{3}a \cdot x$ = 0 | · 3

$a \cdot x$ = 0 | : a Man darf durch **a** teilen, da **a** laut Voraussetzung ungleich Null ist!

x = 0 => N (0 | 0) Hier wurde **a** eliminiert. Daher gehen alle Kurven der Kurvenschar, unabhängig von **a**, durch die eine Nullstelle N (0 | 0).

Nun kann man aber auch zeigen, dass eine Kurvenschar keine Nullstelle hat:

Gegeben sei die Funktionenschar: $f_a(x) = x^2 + a$ mit **a** > 0. Zeige, dass die Funktion keine Nullstelle hat.

Wir setzen die Schar wieder gleich Null.

$x^2 + a = 0$ | - a

$x^2 = -a$ | $\sqrt{\ }$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$

Nun ist aber **a** laut Voraussetzung größer als Null, daher ist der Wert unter der Wurzel kleiner als Null und die Wurzel so nicht definiert. Daher kann es keine Nullstelle geben, wie man sich auch leicht veranschaulicht, wenn man die Kurvenschar skizziert.

Anders wäre es, wenn **a** < 0 wäre. Dann würde für die Wurzel gelten: $\sqrt{-(-a)} = \sqrt{a}$ und die Wurzel wäre definiert.

Dies bringt uns zur Frage 2:

Wie muss man den Parameter **a** wählen, damit die Schar $f_a(x) = x^2 + 2a + 6$ genau eine , keine oder unendlich viele Nullstellen hat.

$x^2 + 2a + 6 = 0$ | -6 | - 2a

$x^2 = -2a - 6$

$x = \sqrt{-2a - 6}$

Nun muss man also untersuchen, für welche **a** der Wert unter der Wurzel negativ (=> keine Nullstelle) , null (=> genau eine) oder positiv (=> unendlich viele Nullstellen) wird.

$-2a - 6 = 0$ |+6

$-2a = 6$ |:(-2)

a = - 3

Ist **a** = -3, dann wird der Wert unter der Wurzel null und wir haben genau eine Nullstelle.

Ist **a** < -3, dann wird der Wert unter der Wurzel positiv. Beispiel Sei **a** = - 4, dann gilt: $\sqrt{-2 \cdot (-4) - 6} = \sqrt{+8 - 6} = \sqrt{+2}$

Ist **a** > -3, dann wird der Wert unter der Wurzel negativ. Beispiel Sei **a** = -2, dann gilt: $\sqrt{-2 \cdot (-2) - 6} = \sqrt{+4 - 6} = \sqrt{-2}$

Aus diesem Grund ist auch oft eine Fallunterscheidung nötig.

Aufgabe: Berechne die Nullstellen der folgenden Kurvenschar $f_a(x) = x^2 - a$.

$x^2 - a = 0$

$x^2 = a$

$x = \sqrt{a}$

Nun muss man eine Fallunterscheidung durchführen:

1. Fall **a** < **0**. Dann gibt es keine Nullstelle
2. Fall a **=** **0**. Dann gibt es nur die Nullstelle ($\sqrt{0}$ |0) bzw (0 | 0)
3. Fall **a** > **0**. Dann gibt es nur die Nullstellen ($\sqrt{a}$ |0)

Jedes Mal eine Fallunterscheidung zu machen, kann sehr zeitaufwändig sein. Daher ist es immer wichtig zu schauen, ob **a** schon in der Aufgabenstellung eingeschränkt wurde:

Aufgabe: Berechne die Nullstellen der folgenden Kurvenschar $f_a(x) = x^2 - a$ mit a > 0.

4 Schnittpunktbestimmung

Analog wie oben kann man auch die Anzahl und Lage gemeinsamer Schnittpunkte bestimmen.

Gegeben seien die Kurvenschar $f_a(x) = a(x-1)^2 + 2$ und die Funktion $f_a(x)$ = ax² - ax +a

mit a $\neq 0$. Bestimme die Anzahl und Lage der Schnittpunkte.

Hier muss man beide Funktionen gleichsetzen und nach **x** auflösen. Anschließend aber noch den **y**-Wert berechnen.

$a(x-1)^2 + 2 = ax^2 - ax + a$

$a(x^2 - 2x + 1) + 2 = ax^2 - ax + a$

$ax^2 - 2ax + a + 2 = ax^2 - ax + a \;|-ax^2\; |+ax\; |-a$

$-ax + 2 = 0$

$-ax = -2$

$x = \frac{2}{a}$

„**a**“ ist nicht „rausgeflogen“, daher gibt es unendlich viele Schnittpunkte für a ungleich 0. Achtung: Jeder einzelne Graph der Kurvenschar hat natürlich immer einen Schnittpunkt mit der Funktion. Aber das ist nicht gefragt, sondern wie viele Schnittpunkte die komplette Schar hat und das sind dann unendlich viele.

Um den **y**-Wert zu ermitteln, setzt man den **x**-Wert in die Funktion ein. Hier nehmen wir die „einfachere“ Funktion. $a\left(\frac{2}{a}\right)^2 - a\left(\frac{2}{a}\right) + a = a\left(\frac{4}{a^2}\right) - a\left(\frac{2}{a}\right) + a = \left(\frac{4}{a}\right) - 2 + a = \frac{4}{a} - 2 + a = \frac{4}{a} - \frac{2a}{a} + \frac{a^2}{a} = \frac{4-2a+a^2}{a} = \frac{a^2-2a+4}{a}$

Als Schnittpunkt ergibt sich daher SP $\left(\frac{2}{a}\; ; \; \frac{a^2-2a+4}{a}\right)$.

5 Gemeinsamer Punkt aller Kurven einer Funktionenschar

Aufgabe: Zeige, dass alle Graphen der Schar $y = ax^2 - 2ax + a + 2$ durch den Punkt P(1|2) gehen.

Rechnung: Setze den Punkt in die Gleichung ein:

$2 = a \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + a + 2$

$2 = a - 2 \cdot a + a + 2$

$2 = 2$

Hier erhalten wir nun zwei Ergebnisse: Einerseits wurde **a** eliminiert, was bedeutet, dass es nur einen Punkt und gibt und andererseits erhalten wir eine wahre Aussage, was bedeutet, dass der vermutete Punkt genau der Punkt ist, in dem sich alle Graphen schneiden.

Wäre der Parameter **a** nicht „rausgeflogen“, gäbe es unendlich viele Punkte. Hätten wir eine unwahre Aussage erhalten, dann hätten wir gar keinen gemeinsamen Schnittpunkt aller Graphen.

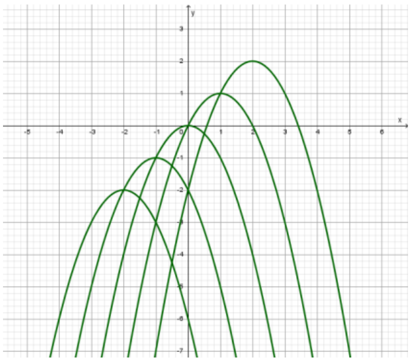
6 Ableitung einer Kurvenschar

Der Parameter **a** wird bei der Ableitung wie eine konkrete Zahl / Konstante behandelt. Daher wird folgendermaßen abgeleitet:

Beispiel ohne Parameter	Analog mit Parameter
$f(x) = 0$ $f'(x) = 0$	$f_a(x) = a$ $f_a'(x) = 0$
$f(x) = 2$ $f'(x) = 0$	$f_a(x) = 2a$ $f_a'(x) = 0$
$f(x) = 3x$ $f'(x) = 3$	$f_a(x) = ax$ $f_a'(x) = a$
	$f_a(x) = 3ax$ $f_a'(x) = 3a$
$f(x) = 3x^2$ $f'(x) = 6x$	$f_a(x) = ax^2$ $f_a'(x) = 2ax$
	$f_a(x) = 3ax^2$ $f_a'(x) = 6ax$
$f(x) = 3x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 4$ $f'(x) = 9x^2 - \frac{2}{4}x = 9x^2 - \frac{1}{2}x$	$f_a(x) = 4x^2 - 2ax + 3a$ $f_a'(x) = 8x - 2a$

Die Produkt-, Quotienten und Kettenregel wird ebenso angewendet.

7 Extremstellen



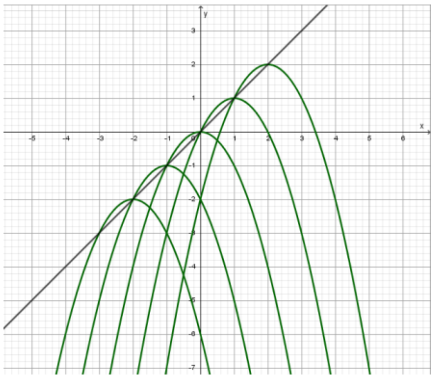
Gegeben ist sei die Kurvenschar $f_a(x) = -(x-a)^2 +$ a. Berechne die Extremstellen.

Hierzu bilden wir zunächst die Ableitung:

$f_a{'}(x) = -2(x-a) \cdot 1$
$f_a{'}(x) = -2(x-a)$
$f_a{''}(x) = -2$

Hier wurde mit der Kettenregel abgeleitet. Alternativ kann man die Binomische Formel auch ausmultiplizieren und dann ableiten.

$-2(x-a)$ = 0 | :(-2)
x - a = 0
x = a



In die zweite Ableitung eingesetzt: $f_a{''}(a) = -2$ < 0 => HP

y-Wert ermitteln: $f_a(a) = -(a-a)^2 +$ a = 0 +a = a => HP(a | a)

Man kann erkennen, dass alle Extremwerte auf der Kurve y = x liegen. Dies nennt man die „Ortskurve" einer Geraden.

8 Ortskurve

Die Ortskurve kann man folgendermaßen berechnen:

Gegeben ist z. B. ein Hochpunkt HP(a +1 | 2a).

Der erste Eintrag ist der x-Wert und der zweite der y-Wert. Daher gilt: HP(a | 2a)
x y

Das ergibt zwei Gleichungen: x = a +1 und y = 2a

x = a nach **a** auflösen: a = x-1 und für **a** in die zweite Gleichung einsetzen: y = 2(x-1) => y = 2x -2.

Weiteres Beispiel:

Eine Kurvenschar hat einen TP bei (2a | 6a).

Das ergibt die beiden Gleichungen: x = 2a und y = 6a

x = 2a nach **a** auflösen: a = $\frac{x}{2}$ **.**

Dies in zweite Gleichung eingesetzt, ergibt: $y = 6 \cdot \frac{x}{2}$ => y = 3 x

Nun haben wir eine Gleichung, ohne den Parameter **a** und diese gibt die Lage der Extrempunkte an.

Die Ortskurve der Wendepunkte ermittelt man ebenso.

9 Parameter bestimmen

Bei den folgenden Aufgaben wird eine bestimmte Kurve gesucht, die z.B. durch einen bestimmten Punkt geht oder an einer bestimmten Stelle eine vorgegebene Steigung besitzt.

Beispiel 1: Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = 2x + a$. Für welchen Parameter **a** geht die Kurvenschar durch den Punkt P(1|3)?

Rechenweg: P in $f_a(x)$ einsetzen und **a** berechnen:

3 = 2 · 1 + a

3 = 2 + a

a = 1

Für **a** = 1 geht der Graph der Schar durch den Punkt P(1|3). Überprüfe dies, indem du die Funktion zeichnest

Beispiel 2: Welche Kurve der Schar $f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$ hat an der Stelle x = 4 die Steigung 1?

$$f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$$

$$f_a{}'(x) = 2x - 2a$$

$$f_a{}'(4) = 1$$

$$2 \cdot 4 - 2 \cdot a = 1$$

$$8 - 2a = 1 \qquad | - 8$$

$$-2a = -7 \qquad |: (-2)$$

$$a = 3{,}5$$

Für $f_{3,5}(x)$ hat die Kurve die Steigung 1 an der Stelle x = 4

10 Aufgaben

Aufgabe 1: Nullstellen und Extremstellen berechnen

Gegeben ist die Schar $f_a(x) = x^3 – 3ax^2$ ($a \in IR$, $a > 0$)

Berechne die Nullstellen und Extrema der Schar.

NST: $x^3 - 3ax^2 = 0$

$x^2 (x - 3a) = 0$ Bemerkung: Immer den größtmöglichen Term ausklammern, also x^2 und nicht nur x!

1. Fall: $x = 0$ $N_1(0/0)$
2. Fall: $x - 3a = 0 \mid +3a$

$x = 3a$

$N_2 (3a/0)$

Extrema:

$f_a‘(x) = 3x^2 - 6ax$

$f_a‘‘(x) = 6x - 6a$

$f_a‘‘‘(x) = 6$

$3x^2 - 6ax = 0$

$3x (x - 2a) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$

$x - 2a = 0 /+2a$

$x = 2a \Longrightarrow x_2 = 2a$

$f_a''(0) = 6 \cdot 0 - 6a = -6a < 0 \Longrightarrow$ HP, da $a > 0$ laut Vor.

$f_a'' (2a) =6 \cdot 2a - 6a = 6a > 0 \Longrightarrow$ TP, da $a > 0$ laut Vor.

$f_a' (0) = 0^3 - 3a0^2 = 0$

$f_a (2a) = (2a)^3 - 3a (2a)^2 = 8a^3 - 3a \cdot 4a^2 = 8a^3 - 12a^3 = -4a^3$

HP(0|0); TP(2a|-4a^3)

Aufgabe 2: Vollständige Kurvendiskussion

Gegeben sei die Kurvenschar $f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$ mit a > 0. Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizziere den Graphen für a = 0,1 , a = 1 und a = 3

1. Nullstellen:

pq-Formel: $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

- ⇨ NST1 ($a + \sqrt{a^2 - 1}$ |0)
- ⇨ NST2 ($a - \sqrt{a^2 - 1}$ |0)

2. Ableitungen:

f_a'(x)= 2x-2a

f_a''(x)= 2

f_a'''(x = 0

3. Verhalten für $x \to \pm\infty$:

Für $x \to +\infty$, gilt $f(x) \to +\infty$

Für $x \to -\infty$, gilt $f(x) \to -\infty$

4. Extremstellen:

2x-2a = 0 | +2a

2x = 2a | :2

x = a => N (a | 0)

$f_a''(x) = 2 > 0$ => TP

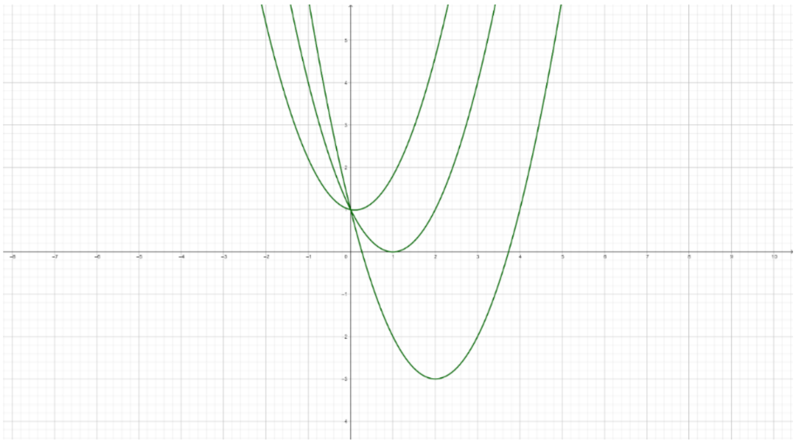
$$f_a(x) = a^2 - 2a * a + 1$$

$$= -a^2 + 1$$

⇨ TP (a | $-a^2+1$)

5 . Wendestelle: $f_a''(x) = 2 \neq 0$ => Keine Wendestelle

Beispiele für a = 0,1 , a = 1 und a = 3



Aufgabe 3: Vollständige Kurvendiskussion

Gegeben sei die Kurvenschar $f_a(x) = x^2 - 2ax + 1$ (a € R , a > 0)

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch und skizziere den Graphen für $f_{1,5}$, f_1 *und* $f_{0,5}$

<u>Ableitungen:</u>

f_a ‘(x) = 2x - 2a

f_a ‘‘(x) = 2

<u>Symmetrie:</u>

$f(-x) = (-x)^2 - 2a(-x) + 1 = x^2 + 2ax + 1$

$-f(x) = -(x^2 - 2ax + 1) = -x^2 + 2ax - 1$

-> keine Symmetrie erkennbar

<u>Nullstellen:</u>

$x^2 - 2ax + 1 = 0$

$$x1{,}2 = -\frac{-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2a}{2}\right)^2 - 1}$$

$N_1 = (a + \sqrt{a^2 - 1} \mid 0)$

$N_2 = (a - \sqrt{a^2 - 1} \mid 0)$

<u>Verhalten für x -> $\pm\infty$:</u>

X -> + ∞ gilt: f (x) -> + ∞

X -> − ∞ gilt: f (x) -> − ∞

<u>Extremstellen:</u>

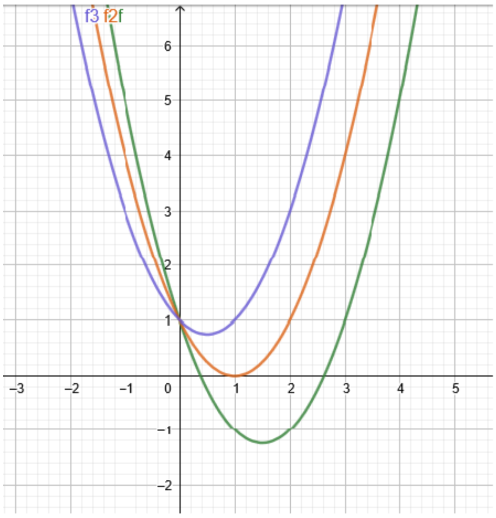
2x – 2a = 0 |+ 2a

2x = 2a |÷ 2

x = a

f_a ‘‘(a) = 2 > 0

☐ TP



f_a (a) = $a^2 - 2a * a + 1 = a^2 - 2a^2 + 1 = - a^2 + 1$

TP (a | - a^2 + 1)

<u>Wendepunkt:</u>

f_a ‘‘(x) = 0

$2 \neq 0$

☐ Keine Wendestelle

<u>Graph:</u>

f1: a = 1,5 ; f2: a = 1 ; f3: a = 0,5

Aufgabe 4: Ortskurve berechnen

Bestimme die Lage der Nullstellen und der Extrema von $f_a(x) = x^2 - ax$. Skizziere f_1, f_3, f_0 und berechne die Ortskurve der Tiefpunkte!

<u>NST:</u>

x^2-ax = 0

x (x-a) = 0 => $x_1 = 0$

x-a = 0 |+a

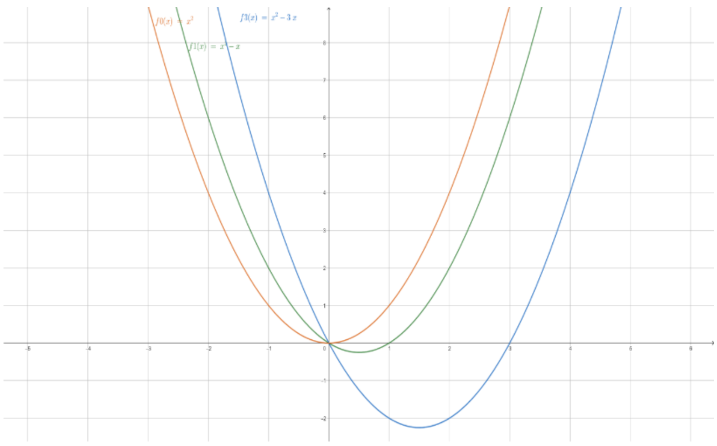
x = a => $x_2 = 0$

<u>Extrema:</u>

f_a´(x) = 2x-a

fa´´(x) = 2

2x-a = 0 | + a |:2



$x = \frac{a}{2}$

f_a´´($\frac{a}{2}$) = 2 > 0 => TP

$f_a(\frac{a}{2}) = (\frac{a}{2})^2 - \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = - \frac{a^2}{4}$

TP ($\frac{a}{2}$ / - $\frac{a^2}{4}$)

Ortskurve:

$x = \frac{a}{2}$ => a = 2x

a in y = - $\frac{a^2}{4}$ => a in y = - $\frac{(2x)^2}{4}$ => y = - $\frac{4x^2}{4}$ =>

y = $-x^2$

Aufgabe 5: Ortskurve berechnen

$$f_a(x) = \frac{1}{2}\,x^4 - ax^2 \qquad ; (a > 0)$$

Ableitungen:

$$f_a{}'(x) = \ 2x^3 - 2ax$$

$$f_a{}''(x) = \ 6x^2 - 2a$$

$$f_a{}'''(x) = \ 12x$$

Extrema:

Notwendige Bedingung:

$$2x^3 - 2ax = 0$$

$2x(x^2 - a) = 0 \qquad => x_1 = 0$

$$x^2 - a = 0 \qquad | + a$$

$$x^2 = a \qquad |\sqrt{}$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{a}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f_a{}''(0) = \ 6 \cdot 0^2 - 2a = -2a < 0 => HP$$

$$f_a''\left(\sqrt{a}\right) = \ 6 \cdot \sqrt{a}^2 - 2a = 6a - 2a = 4a > 0 => TP$$

$$f_a''\left(-\sqrt{a}\right) = \ 6 \cdot (-\sqrt{a})^2 - 2a = 6a - 2a = 4a > 0 => TP$$

y-Werte:

$$f_a\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{a}^4 - a\sqrt{a}^2 = \frac{1}{2}\,a^2 - a^2 = -\,\frac{1}{2}\,a^2$$

$$TP(\,\sqrt{a}\,| - \frac{1}{2}\,a^2)$$

Ortskurve ermitteln:

$$x = \sqrt{a}$$

I) $a = x^2$

II) $y = -\frac{1}{2}a^2$

I in II)

I) $y = -\frac{1}{2}(x^2)^2 = -\frac{1}{2}x^4$

Aufgabe 6: Anzahl von Nullstellen und gemeinsamer Punkt ermitteln

Sei $a \neq 0$: Zeige, dass die Kurvenschar $f_a(x) = xa$ nur eine NST besitzt und die Kurvenschar $f_a(x) = x + a$ unendlich viele Nullstellen besitzt und die Schar $f_a(x) = ax^2 + 2$ keine NST besitzt.

Zu 1:

$$ax = 0 \,|: a \;\;=>\;\; x = 0$$

Da a nicht relevant für die Nullstellen ist, gehen alle Repräsentanten durch die Nullstelle (0|0).

Zu 2:

$$x + a = 0 \,| - a$$

$$x = -a$$

Da a bei der Nullstelle enthalten ist, spielt es keine Rolle und es gibt unendlich viele Nullstellen bei (-a|0) .

Zu 3:

$f_a(x) = ax^2 + 2 = 0$

x = $\sqrt{-\frac{2}{a}}$ Da a größer Null ist, ist der Wert unter der Wurzel negativ ist, existiert keine Nullstelle.

$$f_a(x) = ax^2 - 2ax + a + 3$$

Zeige, dass alle Funktionen der Kurvenschar durch den gemeinsamen Punkt P(1|3) gehen.
Ziel: a loswerden

$$3 = a(1)^2 - 2a + a + 3$$

$$3 = a - 2a + a + 3$$

$$3 = 3$$

Da a eliminiert wird gehen alle Funktionen/Graphen durch (1|3).

Aufgabe 7: Parameter einer Wendetangente bestimmen

a) Welche Kurve der Schar $f_a(x) = x^3 - 3ax^2$ hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -9?

$f_a´(x) = 3x^2 -6ax$

$-9 = 3\cdot 1^2 -6\cdot a\cdot 1$

$-9 = 3 -6a$

$6a = 12$

$a = 2$

$f_2(x)$ hat an der Stelle x=1 die Steigung -9

b) Welche Kurve der Schar besitzt eine Wendetangente, die durch den Punkt P(0|8) geht?

$f_a(x) = x^3 - 3ax^2$

$f_a´(x) = 3x^2 -6ax$

$f_a´´(x) = 6x -6a$

$f'''a(x)=6$

$6x-6a=0$

$x=a$

$f_a´´´(a) \neq 0$ => Wendepunkt

$f_a(a) = a^3-3a\cdot a^2= -2a^3$

$WP(a|-2a^3)$

Tangente bestimmen:

$y = mx + b$ m: $f'_a(x) = 3x^2-6ax$

$f'_a(a) = 3a^2-6a\cdot a = 3a^2-6a^2 = -3a^2$

b: $-2a^3 = -3a^2\cdot a+b$

$-2a^3 = -3a^3+b$

$a^3 = b$

Tangente im Wendepunkt: $y = 3a^2\cdot x+a^3$

Nun Punkt P(0|8) einsetzen.

$8 = -3a\cdot 0^2+a^3$

$8 = a^3$

$2 = a$

Für a = 2 geht die Wendetangente durch den Punkt P(0|8)